10. Rovnice a nerovnice s absolutními hodnotami

DEF.: ABSOLUTNÍ HODNOTA REÁLNÉHO ČÍSLA a ($a\in R$) je defin. takto:

1. pro $a \geq 0$ je $|a| = a$
2. pro $a < 0$ je $|a| = -a$ (číslo opačné)

VĚTY:

$\forall a,b \in R$: $|a| \geq 0$ $\quad |a| = |-a|$ $\quad |a\cdot b| = |a|\cdot|b|$ $\quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$

př. $\underbrace{|3| = 3 \quad |-3| = 3}_{|3| = |-3|}$ $\quad |-x| = |-1\cdot x| = |-1|\cdot|x| = 1\cdot|x| = |x|$ $\quad |2x| = |2|\cdot|x| = 2|x|$ bez přímo $\quad \left|\frac{2}{x}\right| = \frac{|2|}{|x|} = \frac{2}{|x|}$

GEOMETRICKÝ VÝZNAM

číslo $|a|$ je ROVNO VZDÁLENOSTI OBRAZU ČÍSLA a na číselné ose OD POČÁTKU (od obrazu čísla 0)

$|a|$ $|a|$; $-a$ 0 a $\qquad |a-b| = |b-a|$; a b

číslo $|a-b| = |b-a|$ je ROVNO VZDÁLENOSTI OBRAZŮ ČÍSEL a, b na číselné ose

příklady

NA ZÁKLADĚ GEOM. VÝZNAMU – TYP NEZNÁMÁ V ABS. H., KOEFICIENT U NEZNÁMÉ 1

① řešte v R

a) $|x| = 6$ ($x_0 = 0$); $-6 \; 0 \; 6$; $\mathcal{K} = \{-6, 6\}$

$|x| = 0$ ($x_0 = 0$); 0; $\mathcal{K} = \{0\}$

$|x| = -2$ $[\forall x\in R: |x| \geq 0]$; $\mathcal{K} = \emptyset$ [nedál. nemůže být -2]

$|-x| = 2$; $|x| = 2$ ($x_0 = 0$); $-2 \; 0 \; 2$; $\mathcal{K} = \{-2, 2\}$

DÚ dokončit

HLEDÁME BODY S POŽADOVANOU VZDÁLENOSTÍ

b) $|x+3| = 4$ $[x_0 = -3]$; $-7 \; -3 \; 1$; $\mathcal{K} = \{-7, 1\}$

$|4-x| = 2$; $|x-4| = 2$ $[x_0 = 4]$; $2 \; 4 \; 6$; $\mathcal{K} = \{2, 6\}$

$|-x-4| = 2$ $\left[\begin{array}{l}|(-1)(x+4)| = 2\\ |-1||x+4| = 2\end{array}\right]$; $|x+4| = 2$ ($x_0 = -4$); $-6 \; -4 \; -2$; $\mathcal{K} = \{-6, -2\}$

$|x-3| = -2$ $[\,|a| \geq 0$ pro $\forall a \in R]$; $\mathcal{K} = \emptyset$ [vzd. bodů $x, 3$ vždy ≥ 0, tedy nemůže být -2]

ZOPAKOVAT čl. 8 – ABSOLUTNÍ HODNOTA (M1 – ČÍSELNÉ OBORY)

② řešte v R

a) $|x| < 3$ $[x_0 = 0]$; $-3 \; 0 \; 3$; $\mathcal{K} = (-3, 3)$

$|x| \geq 4$ $[x_0 = 0]$; $-4 \; 0 \; 4$; $\mathcal{K} = (-\infty, -4\rangle \cup \langle 4, +\infty)$

$|x| > 0$ $[x_0 = 0]$; 0; $\mathcal{K} = R - \{0\}$ $[\mathcal{K} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)]$

$|x| < 0$ $[x_0 = 0]$; $\forall x\in R: |x| \geq 0$; $\mathcal{K} = \emptyset$

DÚ dokončit

b) $|x-5| \leq 2$ $[x_0 = 5]$; $3 \; 5 \; 7$; $\mathcal{K} = \langle -3, 7\rangle$

$|x+3| > 2$ $[x_0 = -3]$; $-5 \; -3 \; -1$; $\mathcal{K} = (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$

$|x+1| > 0$ $[x_0 = -1]$; -1; $\mathcal{K} = R$ $(\forall x\in R: |x| \geq 0)$

$|x-2| < 0$ $[x_0 = 2]$; $\forall x\in R: |x| \geq 0$ tj. $|x-2| < 0$ nemá řeš.; $\mathcal{K} = \emptyset$

! KOEFICIENTY U NEZNÁMÉ MUSÍ BÝT 1 => viz násl. příklad

- ROZLIŠUJ ROVNICE A NEROVNICE!

③ Řeš v R

a) $|2x-3| = 1$

$|a \cdot b|$

$|2(x-\frac{3}{2})| = 1$

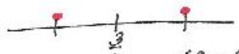
$|a| \cdot |b|$

$|2| \, |x-\frac{3}{2}| = 1$

$2|x-\frac{3}{2}| = 1 \quad |:2$

$|x-\frac{3}{2}| = \frac{1}{2}$

$x_0 = \frac{3}{2}$



$\mathcal{K} = \{1, 2\}$

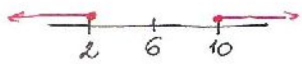
b) $|\frac{x}{2} - 3| \geqq 2$

$|\underbrace{\tfrac{1}{2}(x-6)}_{=3}| \geqq 2$

$\frac{1}{2}|x-6| \geqq 2 \quad |\cdot 2$

$|x-6| \geqq 4$

$x_0 = 6$

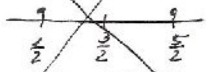


$\mathcal{K} = (-\infty, 2\rangle \cup \langle 10, +\infty)$

NELZE!

~~$|2x-3| = 1$~~

~~$[x_0 = \frac{3}{2}]$~~



~~$\mathcal{K} = \{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\}$~~

LZE!

$|2x-3| = 1 \quad |:2$

$|x-3| = \frac{1}{2}$

dále viz a)

c) $|-2x-1| > 3$

$|(-1)(2x+1)| > 3$

$|-1| \, |2x+1| > 3$

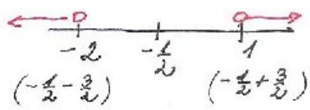
$1 \cdot |2x+1| > 3$

$|2(x+\frac{1}{2})| > 3$

$2|x+\frac{1}{2}| > 3 \quad |:2$

$|x+\frac{1}{2}| > \frac{3}{2}$

$x_0 = -\frac{1}{2}$



$\mathcal{K} = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

NEBO

$|-2(x+\frac{1}{2})| > 3$

$|-2| \, |x+\frac{1}{2}| > 3$

$2|x+\frac{1}{2}| > 3 \quad |:2$

$|x+\frac{1}{2}| > \frac{3}{2}$

NELZE

~~$|-2x-1| > 3 \quad |:(-2)$~~

~~$|x+\frac{1}{2}| < -\frac{3}{2}$~~

POKUD SI NEJSTE JISTÍ ÚPRAVOU => využijte jiný způsob řešení! (viz 3a) → 4a))

④ Řeš v R

VYUŽITÍM DEFINICE ABS. HODNOTY – VHODNÉ PRO SLOŽITĚJŠÍ S JEDNOU ABSOLUTNÍ HODNOTOU

a) $|\overset{a}{2x-3}| = 1$

$|a|$

1. $a \geqq 0 \ldots |a| = a$
2. $a < 0 \ldots |a| = -a$

1. $\overset{a \geqq 0}{2x-3 \geqq 0} \ldots \overset{|a| = a}{|2x-3| = 2x-3} \ldots$ rce má pak tvar $2x-3 = 1 \quad |+3$

$2x \geqq 3$ $\qquad 2x = 4 \quad |:2$

$x \geqq \frac{3}{2}$ $\qquad x = 2 \in \mathcal{D}_1$

$\mathcal{D}_1 = \langle \frac{3}{2}, +\infty)$

$\mathcal{K}_1 = \{2\}$

2. $\overset{a < 0}{2x-3 < 0} \ldots \overset{|a| = -a}{|2x-3| = -(2x-3)} \ldots$ rce má pak tvar $3-2x = 1$

$2x < 3$ $\qquad = -2x+3$ $\qquad -2x = -2$

$x < \frac{3}{2}$ $\qquad = 3-2x$ $\qquad x = 1 \in \mathcal{D}_2$

$\mathcal{D}_2 = (-\infty, \frac{3}{2})$

$\mathcal{K}_2 = \{1\}$

$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 = \{2\} \cup \{1\} = \{1, 2\}$

b) $7-4x=|4x-7|$ $\qquad O=\mathbb{R},\ D=\mathbb{R}$

1. $4x-7\geq 0 \ \dots\ 7-4x=4x-7$

$4x\geq 7 \qquad -8x=-14$

$x\geq \frac{7}{4} \qquad x=+\frac{14}{8}$

$D_1=\langle \frac{7}{4},+\infty) \qquad x=\frac{7}{4}\in D_1$

$K_1=\{\frac{7}{4}\}$

2. $4x-7<0\ \dots\ 7-4x=-4x+7$

$4x<7 \qquad 0x=0$

$x<\frac{7}{4} \qquad$ platí $(x\in D_2)$

$D_2=(-\infty,\frac{7}{4}) \qquad K_2=D_2$

$$K=K_1\cup K_2=\{\tfrac{7}{4}\}\cup(-\infty,\tfrac{7}{4})=(-\infty,\tfrac{7}{4}\rangle$$

c) $u-|-2u|=1$ $\qquad O=\mathbb{R},\ D=\mathbb{R}$

DÚ

$u-|(-2)u|=1$

$u-|-2||u|=1$

$u-2|u|=1$

1. $u\geq 0\ \dots\ u-2u=1$

$D_1=\langle 0,+\infty) \qquad -u=1$

$u=-1\notin D_1$

$K_1=\emptyset$

2. $u<0\ \dots\ u-2(-u)=1$

$D_2=(-\infty,0) \qquad u+2u=1$

$3u=1$

$u=\frac{1}{3}\notin D_2$

$K_2=\emptyset$

$$K=K_1\cup K_2=\emptyset$$

d) $|3-x|=\frac{1}{2}x+1$ $\qquad O=\mathbb{R},\ D=\mathbb{R}$

DÚ

1. $3-x\geq 0\ \dots\ 3-x=\frac{1}{2}x+1 \quad |\cdot 2$

$-x\geq -3 \qquad 6-2x=x+2$

$x\leq 3 \qquad 4=3x$

$D_1=(-\infty,3\rangle \qquad x=\frac{4}{3}\in D_1$

$K_1=\{\frac{4}{3}\}$

2. $3-x<0\ \dots\ -3+x=\frac{1}{2}x+1 \quad |\cdot 2$

$-x<-3 \qquad -6+2x=x+2$

$x>3 \qquad x=8\in D_2$

$D_2=(3,+\infty)$

$K_2=\{8\}$

$$K=K_1\cup K_2=\{\tfrac{4}{3},8\}$$

NEBO METODOU NULOVÝCH BODŮ

b) $7-4x=|4x-7|$

[nul. b. $4x-7=0$, $4x=7$, $x_0=\frac{7}{4}$

	$(-\infty,\frac{7}{4})$	$\langle\frac{7}{4},+\infty)$
$\lvert 4x-7\rvert$	$\ominus$ $7-4x$	$\oplus$ $4x-7$

např. $2: 4\cdot 2-7>0$ $\oplus$]

1. $x\in(-\infty,\frac{7}{4})\ \dots\ 7-4x=7-4x$

$D_1=(-\infty,\frac{7}{4}) \qquad 0x=0$

pl.

$K_1=D_1=(-\infty,\frac{7}{4})$

2. $x\in\langle\frac{7}{4},+\infty)\ \dots\ 7-4x=4x-7$

$D_2=\langle\frac{7}{4},+\infty) \qquad -8x=-14$

$x=\frac{14}{8}$

$x=\frac{7}{4}\in D_2$

$K_2=\{\frac{7}{4}\}$

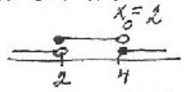
$$K=K_1\cup K_2=(-\infty,\tfrac{7}{4})\cup\{\tfrac{7}{4}\}=(-\infty,\tfrac{7}{4}\rangle$$

⑤ ŘEŠ V R

a) $|x-2| + |2x-8| = 5$ $\quad O = R,\ D = R$

(3. zp.) METODA NULOVÝCH BODŮ – vhodná pro více absolutních hodnot (lze i pro 1 abs. h.)

[nul. b. $x-2=0$ $\quad 2x-8=0$
$x_0 = 2$ $\quad 2x = 8$
$x_0 = 4$]



	D_1 $(-\infty, 2)$	D_2 $\langle 2, 4)$	D_3 $\langle 4, +\infty)$	
$\|x-2\|$	⊖ $2-x$	0 ⊕ $x-2$	⊕ $x-2$	zv. 5: $x-2 = 5-2 > 0$ ⊕
$\|2x-8\|$	⊖ $8-2x$	⊖ $8-2x$	0 ⊕ $2x-8$	zv. 5: $2x-8 = 10-8 > 0$ ⊕

[1. NUL. BODY rozdělíme def. obor D na intervaly (dílčí def. obory) tak, aby jejich průnik byla prázdná mn. (nul. body – musí – jen v jednom intervalu)

2. sestavíme tabulku pro odstranění abs. hodnoty
– nejprve zjistíme, v kterých intervalech výraz v abs. hodnotě nabývá kladných ⊕, resp. záporných hodnot ⊖ [postup jako u nerovnic v podíl. tvaru]
– odstraníme abs. h. ⊕ stejný výraz
⊖ opačný výraz

3. v dílčích def. oborech řešíme rovnici (nerovnici), místo výrazu s abs. h. opíšeme výraz bez abs. h. z tabulky (v příslušném intervalu)]

1. $x \in (-\infty, 2)$ ... $2-x+8-2x=5$
$D_1 = (-\infty, 2)$
$10x-3x=5$
$-3x=-5$
$x = \frac{5}{3} \in D_1$
$K_1 = \{\frac{5}{3}\}$

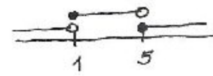
2. $x \in \langle 2, 4)$ ... $x-2+8-2x=5$
$D_2 = \langle 2, 4)$
$-x+6=5$
$-x=-1$
$x = 1 \notin D_2$
$K_2 = \emptyset$

3. $x \in \langle 4, +\infty)$ ... $x-2+2x-8=5$
$D_3 = \langle 4, +\infty)$
$3x-10=5$
$3x=15$
$x = 5 \in D_3$
$K_3 = \{5\}$

$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$
$K = \{\frac{5}{3}\} \cup \emptyset \cup \{5\}$
$K = \{\frac{5}{3}, 5\}$

b) $|x-5| - |x-1| = 4$ $\quad O = R,\ D = R$

[nul. b. $x-5=0$ $\quad x-1=0$
$x_0 = 5$ $\quad x_0 = 1$]



	D_1 $(-\infty, 1)$	D_2 $\langle 1, 5)$	D_3 $\langle 5, +\infty)$	
$\|x-5\|$	⊖	⊖	0 ⊕	zv. 6: $6-5>0$
$\|x-1\|$	⊖	0 ⊕	⊕	zv. 6: $6-1>0$

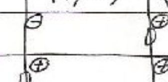
průchodem přes nul. bod se mění u lin. dvojčl. zn.

1. $x \in (-\infty, 1)$ ... $5-x-(1-x)=4$
$\underbrace{\quad}_{D_1}$
$5-x-1+x=4$
$0x+4=4$
$0x=0$ pl.
$K_1 = D_1 = (-\infty, 1)$

2. $x \in \langle 1, 5)$ ... $5-x-(x-1)=4$
$\underbrace{\quad}_{D_2}$
$5-x-x+1=4$
$-2x+6=4$
$-2x=-2$
$x = 1 \in D_2$
$K_2 = \{1\}$

3. $x \in \langle 5, +\infty)$ ... $x-5-(x-1)=4$
$\underbrace{\quad}_{D_3}$
$x-5-x+1=4$
$0x-4=4$
$0x=8$ nepl.
$K_3 = \emptyset$

$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$
$K = (-\infty, 1) \cup \{1\} \cup \emptyset$
$K = (-\infty, 1\rangle$



[POZOR !
– opačný výraz k výrazu $x+3$ je $-(x+3) = -x-3$
$x-3$ je $-(x-3) = -x+3 = 3-x$]

c) $|x| + |x+1| - |x+2| = 3$ $O = R,\ \mathcal{D} = R$

Š+DÚ [nul. b. $0, -1, -2$


]

	$\mathcal{D}_1$ $(-\infty, -2)$	$\mathcal{D}_2$ $\langle -2, -1)$	$\mathcal{D}_3$ $\langle -1, 0)$	$\mathcal{D}_4$ $\langle 0, +\infty)$	
$\lvert x\rvert$	$\ominus\ -x$	$\ominus\ -x$	$\ominus\ -x$	$\oplus\ x$	nr. 1
$\lvert x+1\rvert$	$\ominus\ -x-1$	$\ominus\ -x-1$	$\oplus\ x+1$	$\oplus\ x+1$	nr. 1
$\lvert x+2\rvert$	$\ominus\ -x-2$	$\oplus\ -x-2$	$\oplus\ x+2$	$\oplus\ x+2$	nr. 1

1. $\mathcal{D}_1 = (-\infty, -2)$ ... $-x + (-x-1) - (-x-2) = 3$
   $[x \in (-\infty, -2)]$
   $-x - \cancel{x} - 1 + \cancel{x} + 2 = 3$
   $-x + 1 = 3$
   $-x = 2$
   $x = -2 \notin \mathcal{D}_1$
   $\mathcal{K}_1 = \emptyset$

2. $\mathcal{D}_2 = \langle -2, -1)$ $-x + (-x-1) - (-x-2) = 3$
   $-x - \cancel{x} - 1 + \cancel{x} + 2 = 3$
   $-x + 1 = 3$
   $-x = 2$
   $x = -2 \in \mathcal{D}_2$
   $\mathcal{K}_2 = \{-2\}$

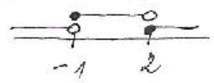
3. $\mathcal{D}_3 = \langle -1, 0)$ ... $-x + (x+1) - (x+2) = 3$
   $-\cancel{x} + \cancel{x} + 1 - x - 2 = 3$
   $-x - 1 = 3$
   $-4 = x$
   $x = -4 \notin \mathcal{D}_3$
   $\mathcal{K}_3 = \emptyset$

4. $\mathcal{D}_4 = \langle 0, +\infty)$ $x + (x+1) - (x+2) = 3$
   $x + x + 1 - x - 2 = 3$
   $x - 1 = 3$
   $x = 4 \in \mathcal{D}_4$
   $\mathcal{K}_4 = \{4\}$

$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3 \cup \mathcal{K}_4 = \emptyset \cup \{-2\} \cup \emptyset \cup \{4\} = \{-2, 4\}$

d) $|x-2| = |1+x|$ $O = R,\ \mathcal{D} = R$

DÚ [nul. b. $2, -1$


]

	$\mathcal{D}_1$ $(-\infty, -1)$	$\mathcal{D}_2$ $\langle -1, 2)$	$\mathcal{D}_3$ $\langle 2, +\infty)$	
$\lvert x-2\rvert$	$\ominus\ 2-x$	$\ominus\ 2-x$	$\oplus\ x-2$	nr. 3: $3-2>0$
$\lvert 1+x\rvert$	$\ominus\ -1-x$	$\oplus\ 1+x$	$\oplus\ 1+x$	$1+3>0$

1. $\mathcal{D}_1 = (-\infty, -1)$ ... $2 - x = -1 - x$
   $[x \in (-\infty, -1)]$
   $0x = -3$ nepl.
   $\mathcal{K}_1 = \emptyset$

2. $\mathcal{D}_2 = \langle -1, 2)$ ... $2 - x = 1 + x$
   $[x \in \langle -1, 2)]$
   $1 = 2x$
   $x = \frac{1}{2} \in \mathcal{D}_2$
   $\mathcal{K}_2 = \{\frac{1}{2}\}$

3. $\mathcal{D}_3 = \langle 2, +\infty)$ ... $x - 2 = 1 + x$
   $0x = 3$ nepl.
   $\mathcal{K}_3 = \emptyset$

$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$
$\mathcal{K} = \emptyset \cup \{\frac{1}{2}\} \cup \emptyset$
$\mathcal{K} = \{\frac{1}{2}\}$

e) $|2x-3| - 2 = 0$ lze i pro 1 abs. h.

DÚ [nul. b. $2x - 3 = 0$, $x_0 = \frac{3}{2}$


]

	$\mathcal{D}_1$ $(-\infty, \frac{3}{2})$	$\mathcal{D}_2$ $\langle \frac{3}{2}, +\infty)$	
$\lvert 2x-3\rvert$	$\ominus\ 3-2x$	$\oplus\ 2x-3$	nr. 2: $2\cdot 2-3>0$

1. $\underbrace{x \in (-\infty, \frac{3}{2})}_{\mathcal{D}_1}$ ... $3 - 2x - 2 = 0$
   $2x = 1$
   $x = \frac{1}{2} \in \mathcal{D}_1$
   $\mathcal{K}_1 = \{\frac{1}{2}\}$

2. $\underbrace{x \in \langle \frac{3}{2}, +\infty)}_{\mathcal{D}_2}$ ... $2x - 3 - 2 = 0$
   $2x = 5$
   $x = \frac{5}{2} \in \mathcal{D}_2$
   $\mathcal{K}_2 = \{\frac{5}{2}\}$

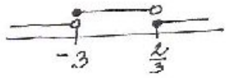
$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 = \{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\}$

⑥ řešte v R

NEROVNICE s abs. hodnotami

a) $|u+3| \geq 8-|2-3u|$ $O=R,\ D=R$

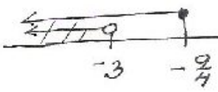
[nul. b. $u+3=0$, $u_0=-3$; $2-3u=0$, $-3u=-2$, $u_0=\frac{2}{3}$]



	D_1 $(-\infty,-3)$	D_2 $\langle -3,\frac{2}{3})$	D_3 $\langle \frac{2}{3},+\infty)$	
$\|u+3\|$	⊖ $-u-3$	0 ⊕ $u+3$	⊕ $u+3$	kr. 1: 1+3 ⊕
$\|2-3u\|$	⊕ $2-3u$	⊕ $2-3u$	0 ⊖ $3u-2$	1-3·1<0 ⊖

1. $x \in (-\infty,-3)$ ... $-u-3 \geq 8-(2-3u)$
$[D_1=(-\infty,-3)$
$-u-3 \geq 8-2+3u$
$-u-3 \geq 6+3u$
! $-9 \geq 4u$ $/ \cdot (-9)^{<0}$ změna nr.
$4u \leq -9$
$u \leq -\frac{9}{4}$ $(-2\frac{1}{4})$

průnik



$K_1=(-\infty,-3)$

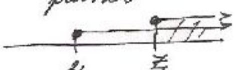
2. $x \in \langle -3,\frac{2}{3})$ $u+3 \geq 8-(2-3u)$
$[D_2=\langle -3,\frac{2}{3})]$ $u+3 \geq 6+3u$
! $-2u \geq 3$ $/ \cdot (-2)$ změna zn. nerov.
$u \leq \frac{3}{2}$

průnik

$K_2=\langle -3,\frac{2}{3}\rangle$

3. $x \in \langle \frac{2}{3},+\infty)$ ... $u+3 \geq 8-(3u-2)$
$[D_1=\langle \frac{2}{3},+\infty)]$ $(0{,}6)$
$u+3 \geq 8-3u+2$
$4u \geq 7$
$u \geq \frac{7}{4}$ $(1{,}75)$

průnik



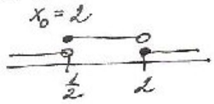
$K=\langle \frac{7}{4},+\infty)$

$K=K_1 \cup K_2 \cup K_3$
$K=(-\infty,-3) \cup \langle -3,\frac{2}{3}\rangle \cup \langle \frac{7}{4},+\infty)$
sjednocení

$K=(-\infty,\frac{2}{3}\rangle \cup \langle \frac{7}{4},+\infty)$

b) $|2x-1|+|x-2| \geq 1$ $O=R,\ D=R$

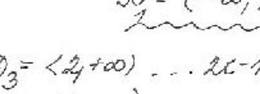
3+2x [nul. b. $2x-1=0$, $2x=1$, $x_0=\frac{1}{2}$; $x-2=0$, $x_0=2$]



	D_1 $(-\infty,\frac{1}{2})$	D_2 $\langle \frac{1}{2},2)$	D_3 $\langle 2,+\infty)$	
$\|2x-1\|$	⊖ $1-2x$	0 ⊕ $2x-1$	⊕ $2x-1$	kr. 3: 2·3-1>0 ⊕
$\|x-2\|$	⊖ $2-x$	⊖ $2-x$	0 ⊕ $x-2$	3-2>0 ⊕

1. $D_1=(-\infty,\frac{1}{2})$ ... $1-2x+2-x \geq 1$
$x \in (-\infty,\frac{1}{2})$
$-3x+3 \geq 1$
! $-3x \geq -2$ $/ \cdot (-1)$ změna nr.
$3x \leq 2$
$x \leq \frac{2}{3}$

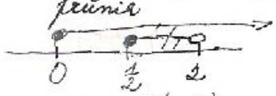
průnik



$K_1=(-\infty,\frac{1}{2})$

2. $D_2=\langle \frac{1}{2},2)$ ... $2x-1+2-x \geq 1$
$x \in \langle \frac{1}{2},2)$
$x+1 \geq 1$
$x \geq 0$

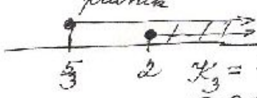
průnik



$K_2=\langle \frac{1}{2},2)$

3. $D_3=\langle 2,+\infty)$ ... $2x-1+x-2 \geq 2$
$x \in \langle 2,+\infty)$
$3x-3 \geq 2$
$3x \geq 5$
$x \geq \frac{5}{3}$

průnik



$K_3=\langle 2,+\infty)$

$K=K_1 \cup K_2 \cup K_3$
$K=(-\infty,\frac{1}{2}) \cup \langle \frac{1}{2},2) \cup \langle 2,+\infty)$

sjednocení

$K=(-\infty,+\infty)=R$

c) $|x-1| + |x| > 4$ $\qquad \mathcal{O} = \mathbb{R},\ \mathcal{D} = \mathbb{R}$

zú [nul. b. $x_0 = 1$ $x_0 = 0$; 0 1]

	$(-\infty, 0)$	$\langle 0, 1)$	$\langle 1, +\infty)$
$\lvert x-1 \rvert$	⊖ $1-x$	⊖ $1-x$	⊕ $x-1$
$\lvert x \rvert$	⊖ $-x$	⊕ x	⊕ x

zv. 2: $2-1>0$

2: $2>0$

1. $x \in (-\infty, 0)$ $\qquad 1-x+(-x) > 4$

$-2x + 1 > 4$

$-2x > 3$

$2x < -3$

$x < -\frac{3}{2}$

průnik

$-\frac{3}{2}$ $\quad 0$

$\mathcal{K}_1 = (-\infty, -\frac{3}{2})$

2. $x \in \langle 0, 1)$ $\qquad 1-x+x > 4$

$0x > 5$

nepl.

$\mathcal{K}_2 = \emptyset$

3. $x \in \langle 1, +\infty)$ $\qquad x-1+x > 4$

$2x - 1 > 4$

$2x > 5$

$x > \frac{5}{2}$

průnik

1 $\quad \frac{5}{2}$

$\mathcal{K}_3 = (\frac{5}{2}, +\infty)$

$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$

$\mathcal{K} = (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup \emptyset \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$

$\mathcal{K} = (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$

[lze příp. pomocí doplňku do $\mathbb{R}$ $\quad -\frac{3}{2}$ $\quad \frac{5}{2}$ $\qquad \mathcal{K} = \langle -\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \rangle'_{\mathbb{R}}$]

⑦ Řešte v $\mathbb{R}$ $\qquad$ TYP VNOŘENÉ ABS. HODNOTY

zú (5') a) $\big| |x+1| - 3 \big| = 1$ $\qquad \mathcal{O} = \mathbb{R},\ \mathcal{D} = \mathbb{R}$

1. zp. 1. $x+1 \geq 0$ $\ \ldots\ |x+1-3| = 1$

$x \geq -1$ $\qquad |x-2| = 1$

$\mathcal{D}_1 = \langle -1, +\infty)$ $\qquad x_0 = 2$

$1 \in \mathcal{D}_1$ $\quad 2$ $\quad 3 \in \mathcal{D}_1$

$\mathcal{K}_1 = \{1, 3\}$

2. $x+1 < 0$ $\qquad |-x-1-3| = 1$

$x < -1$ $\qquad |-x-4| = 1$

$\mathcal{D}_2 = (-\infty, -1)$ $\qquad |x+4| = 1$

$x_0 = -4$

$-5 \in \mathcal{D}$ $\quad -4$ $\quad -3 \in \mathcal{D}$

$\mathcal{K}_2 = \{-3, -5\}$

$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$

$\mathcal{K} = \{1, 3, -3, -5\}$

2. zp. SUBSTITUCE (tato metoda bude probírána později)

$\big| |x+1| - 3 \big| = 1$ $\qquad \mathcal{O} = \mathbb{R}$, $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

subst. $y = |x+1|$

$|y - 3| = 1$

$y_0 = 3$

2 $\quad 3$ $\quad 4$

y_1 $\quad y_2$

$y_1 = 2$ $\qquad y_2 = 4$

ZPĚT K SUBSTITUCI ($y = |x+1|$)

$y_1 = 2$ $\qquad y_2 = 4$

$|x+1| = 2$ $\qquad |x+1| = 4$

$x_0 = -1$ $\qquad x_0 = -1$

$-3 \in \mathcal{D}$ $\quad -1$ $\quad 1 \in \mathcal{D}$ $\qquad -5 \in \mathcal{D}$ $\quad -1$ $\quad 3 \in \mathcal{D}$

$\mathcal{K}_1 = \{-3, 1\}$ $\qquad \mathcal{K}_2 = \{-5, 3\}$

$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 = \{1, 3, -3, -5\}$

b) $|3-|2-x|| \leqq 2$ $\qquad O = R,\ D = R$

1. způsob

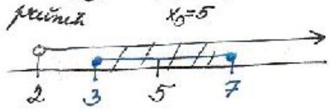
1. $2-x \geqq 0$
$-x \geqq -2$
! $x \leqq 2$
$D_1 = (-\infty, 2\rangle$

$|3-(2-x)| \leqq 2$
$|3-2+x| \leqq 2$
$|1+x| \leqq 2$
$|x+1| \leqq 2$
$x_0 = -1$

$K_1 = \langle -3, 1\rangle$

2. $2-x < 0$
$-x < -2$
! $x > 2$
$D_2 = (2, +\infty)$

$\ldots\ |3-(x-2)| \leqq 2$
$|3-x+2| \leqq 2$
$|5-x| \leqq 2$
$|a-b| = |b-a|$
$|x-5| \leqq 2$
$x_0 = 5$



$K_2 = \langle 3, 7\rangle$

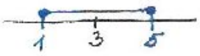
sjednocení

$K = K_1 \cup K_2 = \langle -3, 1\rangle \cup \langle 3, 7\rangle$

2. způsob SUBSTITUCE

$|3-|2-x|| \leqq 2$
subst. $y = |2-x|$

$|3-y| \leqq 2$
$[y_0 = 3]$



$y \in \langle 1, 5\rangle$, tj.:
! $1 \leqq y \leqq 5$

$1 \leqq y \leqq 5$
zpět k subst.
$1 \leqq |2-x| \leqq 5$

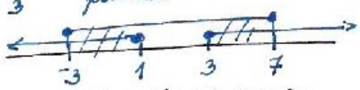
rozdělíme na 2 nerce
$1 \leqq |2-x| \ \wedge\ |2-x| \leqq 5$

$1 \leqq |2-x|$ a souč. $|2-x| \leqq 5$
$|a-b| = |b-a|$

$1 \leqq |x-2|$
$|x-2| \geqq 1$
[mul.b. $x_0 = 2$]

$|x-2| \leqq 5$
[mul.b. $x_0 = 2$]

průnik



$K = \langle -3, 1\rangle \cup \langle 3, 7\rangle$